УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С.Ф.БАБАЕВА
Бакинский Государственный Университет
seva_babaeva@mail.ru

В работе исследована разрешимость некоторой краевой задачи с операторным коэффициентом в краевой условии для оперторно-дифференциального уравнения третьего порядка в гильбертовом пространстве. Получены достаточные условия для разрешимости данной краевой задачи, выраженные коэффициентами краевой задачи.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, краевая задача, положительно-определенный самосопряженный оператор.

Пусть A – положительно-определенный, самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$, а H_γ – шкала гильбертовых пространств, порожденная оператором A, т.е. $H_\gamma = D(A^\gamma)$, $\|x\|_\gamma = \|A^\gamma x\|$, $x \in H_\gamma$, $\gamma \ge 0$ $(H_0 = H)$. Обозначим через $L(X,Y)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, а $L_2(R_+;H)$ гильбертово пространство функций $f(t)$, со значениями в H, определенных почти всюду в $R_+ = (0,\infty)$, для которых $\| f \|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^\infty \| f(t) \|^2 dt \right)^{1/2}$. Далее, следуя монографию [1], вводим пространство $W_2^3(R_+;H) = \{u : u''' \in L_2(R_+;H), A^3 u \in L_2(R_+;H)\}$ с нормой $\| u \|_{W_2^3(R_+;H)} = \left(\| u''' \|^2_{L_2(R_+;H)} + \| A^3 u \|^2_{L_2(R_+;H)} \right)^{1/2}$. Так как по теореме о промежуточных производных [1] имеет место неравенство при любом $u \in W_2^3(R_+;H)$

$$\| A^{3-j} u^{(j)} \|_{L_2(R_+;H)} \le c_j(R_+)\cdot \| u \|_{W_2^3(R_+;H)},$$

то норма $|||u||| = \left(\| u \|^2_{W_2^2(R_+;H)} + \| u'(0) \|^2_{3/2} \right)^{1/2}$ эквивалентна с исходной нормой $\| u \|_{W_2^3(R_+;H)}$.

Рассмотрим в пространстве H следующую краевую задачу

$$\frac{d^3u}{dt^3} + A^3 u + \sum_{j=0}^{3} A_{3-j} u^{(j)} = f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = Ku, \tag{2}$$

где операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A – положительно-определенный, самосопряженный оператор;

2) $B_j = A_j A^{-j} \in L(H;H)$, $\overline{j=0,3}$;

3) оператор $K \in L(W_2^3(R_+;H), H_{5/2})$ и $\| K \|_{W_2^3(R_+;H)\to H_{5/2}} = \kappa$.

Определение 1. Если при любом $f(t) \in L_2(R_+;H)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_2^3(R_+;H)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в R_+, краевому условию (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0} \| u(t) - Ku \|_{5/2} = 0$$

и имеет место оценка

$$\| u \|_{W_2^3(R_+;H)} \le const \| f \|_{L_2(R_+;H)},$$

то ее будем называть регулярным решением задачи (1), (2), а задачу (1) - (2) регулярно разрешимой.

В этой работе найдены достаточные условия на коэффициенты краевой задачи, обеспечивающие регулярную разрешимость задачи (1), (2). Аналогичные задачи для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка рассмотрены в работах [2 – 5].

Обозначим через

$$P_0 u = P_0\left(\frac{d}{dt}\right) u = u''' + A^3 u, \quad P_1 = P_1(d/dt)u = \sum_{j=0}^{3} A_{3-j} u^{(j)}, \quad Pu = P_0 u + P_1 u,$$

$u \in W_{2,K}^3(R_+;H)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1) и 3), причем $\kappa < 1$. Тогда оператор P_0 изоморфно отображает пространство $W_{2,K}^3(R_+;H)$ на $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. Очевидно, что P_0 ограниченный оператор. Покажем, что $Ker\, P_0 = \{0\}$. Действительно, общее решение уравнения $P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u = 0$ из пространства $W_{2,K}^3(R_+;H)$ имеет вид $u_0(t) = e^{-tA}\varphi$, где $\varphi \in H_{3/2}$. Тогда из условия (2) следует, что $\phi - K(e^{-tA}\phi) = 0$ при $(E-Q)\varphi = 0$, где $Q\phi = K(e^{-tA}\phi)$. С другой стороны,

$$\left\| Ke^{-tA}\phi \right\|_{3/2} \le \kappa \left\| e^{-tA}\phi \right\|_{W_2^3(R_+;H)} \le \sqrt{2}\,\kappa \left\| A^3 e^{-tA}\phi \right\|_{L_2(R_+;H)}. \qquad (3)$$

Пологая $A^{5/2}\varphi = x$, получаем, что

$$\left\| A^3 e^{-tA}\varphi \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\| A^{1/2} e^{-tA} z \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \int_0^\infty (Ae^{-2tA}x, x)dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{\mu_0}^\infty \mu e^{-2t\mu} \cdot d(E_\mu x, x) \right) dt = \int_{\mu_0}^\infty \mu \left(\int_0^\infty e^{-2t\mu}\, dt \right) d(E_\mu x, x) = \frac{1}{2}\| x \|^2 = \frac{1}{2}\| \varphi \|^2_{3/2}.$$

Тогда из (3) следует, что $\left\| Ke^{-tA}\varphi \right\|_{3/2} \le \kappa \|\varphi\|_{3/2}$. Так как $\kappa < 1$, то $\varphi = 0$. С другой стороны, легко видеть, что вектор-функция

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i^3\varsigma^3 + A^3)^{-1} (\int_0^{+\infty} f(s) e^{is\varsigma} ds\, e^{-i\varsigma t}\, d\varsigma, \quad t \in R = (-\infty, +\infty)$$

удовлетворяет уравнению $P_0(d(dt)w(t)) = f(t)$, при $t \in R_+$, почти всюду и $w(t) \in W_2^3(R:H)$. Тогда обозначим, через $\alpha(t)$ сужение вектор-функции $w(t)$ на $[0,\infty)$ и имеем решение уравнения $P_0 u = f$ в виде: $u = \alpha(t) + e^{-tA}\varphi$, где $\varphi \in H_{3/2}$ – неизвестный вектор. Из условия (2) следует, что $\alpha(0) + \varphi = K(e^{-tA}\varphi) + K(\alpha(t))$ или $(E-Q)\varphi = K(\alpha(t)) - \alpha(0)$. Так как $\alpha(t) \in W_2^3(R_+;H)$, то $\alpha(0) \in H_{3/2}$, следовательно, вектор $\psi = K(\alpha(t)) - \alpha(0) \in H_{3/2}$. Тогда $\varphi = (E-Q)^{-1}\psi$, поскольку $\|Q\| < \kappa < 1$. Таким образом, $u(t) \in W^3_{2,K}(R_+;H)$. Из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что P_0^{-1} существует и ограничен. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $K = 0$, тогда задача

$$P_0(d/dt)u(t) = f(t), \qquad (4)$$

$$u(0) = 0 \qquad (5)$$

регулярно разрешима. Используя методику работы [6], докажем следующие неравенства.

Лемма 1. Регулярное решение $\varsigma(t)$ задачи (4), (5) удовлетворяет неравенству

$$\left\| A^{3-j} \varsigma^{(j)} \right\|_{L_2(R_+;H)} \le c_j \| P_0 \varsigma \|_{L_2(R_+;H)}, \quad j = \overline{0,3}, \qquad (6)$$

где $c_0 = c_4 = 1, \quad c_1 = 2^{1/3}/3^{1/2}, \quad c_2 = \dfrac{1}{2^{1/3}}$.

Доказательство. Так как

$$\| P_0 \varsigma \|_{L_2(R_+;H)} = \| \varsigma''' \|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| A^3 u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \| \varsigma'(0) \|^2_{3/2} \qquad , \qquad (7)$$

то верность неравенства (6) при $j=0$ и $j=3$ следует из неравенства (3). Для доказательства неравенства при $j=1$ и $j=2$ мы рассмотрим полиноминальный пучок операторов

$$P_j(\lambda;\beta:A)=-\lambda_6 E^6+A^6-\beta(i\lambda)^{2j}, \quad j=1,2\cdot$$

Из результатов работы [6] следует, что при $\beta\in(0,3/2^{2/3})$ $P_j(\lambda;\beta:A)=\Phi_j(\lambda;\beta:A)\,\Phi_j(-\lambda;\beta:A),\ \Phi_j(\lambda;\beta:A)=\lambda^3E+a_{2,j}(\beta)\lambda^2A+a_{1,j}(\beta)\lambda A^2+A^3,$ $(j=1,2)$ причем $a_{1,j}(\beta)>0$, $a_{2,j}(\beta)>0$ и

$$\left\|\Phi_j(d\,|\,dt:\beta:A)\varsigma\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+(S_j(\beta)\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})_{A^2}=\left\|\varsigma\right\|^2-\beta\left\|A^{3-j}\varsigma\right\|^2_{L_2(R_+;H)}, \quad (8)$$

где $\tilde{\psi}=(A^{3-j-1/2}u^{(j)}(0)), \quad j=1,2\in H^2$, а $S_j(\beta)=\begin{pmatrix} a_{1,j}\ a_{2,j} & a_{1j} \\ a_{1j} & a_{2j}\end{pmatrix}$ и при $j=1$ имеет место равенство

$$a_{1,1}^2-2a_{2,1}=-\beta, \quad a_{2,1}^2=2a_{1,1}\ , \quad (9)$$

а при $j=2$ имеет следующее равенство

$$a_{1,2}^2=2a_{2,2}\,, \quad a_{2,2}^2-2a_{1,2}=-\beta\cdot \quad (10)$$

Из результатов работы [6] следует, что если уравнение $\det S_j(\beta)=0$ не имеет решение из интервала $(0,3/2^{2/3})$, то точное значение числа c_j в неравенстве (6) равняется $2^{1/3}/3^{1/2}$, если такое решение существует и β_0 наименьшее из них, то точное значение числа $c_j=\beta_0^{-1/2}$. Таким образом, при $j=1$ мы должны решать уравнение $\det S_1(\beta)=0$ при выполнении равенства (9). В этом случае получаем, что $a_{1,1}^2\cdot a_{21}^2-a_{11}^2=0$ или $a_{2,1}^2=a_{1,1}$, $a_{1,1}^2-2a_{21}=-\beta$, $a_{21}^2=2a_{1,1}$, т.е. $a_{2,1}=2a_{2,1}$, но $a_{2,1}>0$, поэтому решение не существует и $c_j=2^{1/3}/3^{1/2}$. А при $j=2$ имеем: $a_{1,2}\cdot a_{2,2}^2-a_{1,2}^2=0$, $a_{1,2}^2=2a_{2,2}$, $a_{2,2}^2-2a_{1,2}=-\beta$, следовательно, $a_{1,2}^2=2a_{2,2}$, $a_{2,2}^2=a_{1,2}$, т.е. $a_{1,2}^2=2a_{1,2}^{1/2}$, или $a_{1,2}^4=4a_{1,2}$, т.е. $a_{1,2}^3=4$. Тогда $a_{1,2}=\sqrt[3]{4}$, $a_{2,2}=\sqrt[3]{2}$, а $\beta=2a_{1,2}-a_{2,2}^2=\sqrt[3]{4}\in(0,3/2^{2/3})$. Следовательно, $c_2=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 2. При всех $u\in W^2_{2,K}(R_+;H)$ имеет место следующее неравенство

$$\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)}\le c_j(\kappa)\left\|P_0u\right\|_{L_2(R_+;H)}, \ j=\overline{0,3}\ , \quad (11)$$

где $c_1(\kappa)=c_3(\kappa)=\dfrac{1}{1-\kappa}$, $c_1(\kappa)=\dfrac{2^{1/3}}{3^{1/2}}+\dfrac{\kappa^2}{\sqrt{2}(1-\kappa)}$, $c_3(\kappa)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{\kappa^2}{\sqrt{2}(1-\kappa)}$.

Доказательство. Представим $u(t)\in W_{2,K}^3(R_+;H)$ в виде $\varphi\in H_{3/2}$, где $u(t)=\varsigma(t)+e^{-tA}\varphi$, $u(t)$ есть решение уравнения $P_0u=f$, а $\varsigma(t)$ есть решение задачи (4), (5). Тогда получаем, что

$$\|A^{3-j}u^{(j)}\|_{L_2(R_+;H)}\le\|A^{3-j}\varsigma^{(j)}\|_{L_2(R_+;H)}+\|A^3e^{-tA}\varphi\|_{L_2(R_+;H)}\le$$
$$\le c_j\|P_0\varsigma\|_{L_2(R_+;H)}+\frac{\kappa}{\sqrt{2}}\|\varphi\|_{3/2} \tag{12}$$

С другой стороны, $u(0)=Ku$, $\varsigma(0)+\varphi=K(\varsigma(t))+e^{-tA}\varphi$. Учитывая, что $\varsigma(0)=0$ получаем, что $\varphi-K(e^{-tA}\varphi)=K(\varsigma(t))$ т.е. $(E-Q)\varphi=K(\varsigma(t))$, $\varphi=(E-Q)K(\varsigma(t))$ и

$$\|\varphi\|_{3/2}=\|(E-Q)^{-1}\|\cdot\|K(\varsigma(t))\|_{3/2}\le\frac{\kappa}{1-\kappa}\|\varsigma(t)\|_{W_2^3(R_+;H)}\le \tag{13}$$
$$\le\frac{\kappa}{1-\kappa}\|\varsigma\|=\frac{3}{1-\kappa}\|P_0\varsigma\|_{L_2(R_+,H)}.$$

Тогда из неравенства (12) с учетом неравенства (13) получаем, что

$$\|A^{3-j}u^{(j)}\|_{L_2(R_+;H)}\le c_j\|P_0\varsigma\|_{L_2(R_+;H)}+\frac{\kappa^2}{\sqrt{2}(1-\kappa)}\|P_0\varsigma\|_{L_2(R_+;H)}= \tag{14}$$
$$=\left(c_j+\frac{\kappa^2}{\sqrt{21-\kappa}}\right)_j\|P_0\varsigma\|_{L_2(R_+;H)}=\left(c_j+\frac{\kappa^2}{\sqrt{2}(1-\kappa)}\right)_j\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}\quad.$$

Здесь мы учитываем, что $\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}=\|P_0\varsigma\|_{L_2(R_+;H)}$. Лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2. Пусть выполняется условия 1) – 3), причем $\kappa<1$ и $\delta(\kappa)=\sum_{j=0}^{3}c_j^{(\kappa)}\|B_{3-j}\|<1$, где числа $c_j(\kappa)$ определены из леммы 2. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Напишем задачу (1), (2) в виде уравнения $Pu=P_0u+P_1u=f$, где $u\in W_{2,K}^3(R_+;H)$, $f\in L_2(R_+;H)$. После замены $P_0u=\nu$ получаем уравнение $(E+P_1P_0^{-1})\nu=f$ в $L_2(R_+;H)$. Далее, используя лемму 2, получаем, что

$$\|P_1P_0^{-1}\nu\|_{L_2(R_+;H)}\le\sum_{j=0}^{3}\|B_j\|\|A^{3-j}u^{(j)}\|_{L_2(R_+;H)}\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{3}c_j(\kappa)\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}=\delta(\kappa)\|\nu\|_{L_2(R_+;H)}$$

Так как $\delta(\kappa)<1$, то оператор $E+P_1P_0^{-1}$ обратим в $L_2(R_+;H)$ и $u=P_0^{-1}(E+P_1P_0^{-1})^{-1}f$, причем $\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Aliev A.R., Babayeva S.F. On the Boundary Value Problem with the Operator in Boundary Conditions for the Operator-Differential Equations of the Third Order. // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2010, v.6, No.4, p.347-361.
3. Бабаева С.Ф. О корректной разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2013, № 2, с. 47-53
4. Керимов К.А., Мирзоев С.С. Об одной задаче для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с операторным краевым условием. Математ. заметки, 2013, т. 94, в.3, с. 330-334.
5. Mirzoev S.S., Bagirova S.M. Solvability of the Class of Non-local Boundary Value Problems for the Equations of the Fourth Order in Hilbert Space // Applied Mathematical Sciences // v. 7, No 79, 2013, pp.3923-3934.
6. Mirzoev S.S. On the Norms of Intermediate Derivatives // Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. of Phys., Tech., Math. Science, 2003, v.23, No 1, pp. 93-102.

OPERATOR SƏHƏD ŞƏRTLİ ÜÇÜNCÜ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

S.F.BABAYEVA

XÜLASƏ

Təqdim olunmuş işdə Hilbert fəzasında üçüncü tərtib operator-diferensial tənlik üçün operator sərhəd şərtli bir sərhəd məsələsi tədqiq edilmişdir. Baxılan sərhəd məsələsinin həll olunması üçün kafi şərtlər tapılmışdır.Bu şərtlər tənliyə və sərhəd şərtlərinə daxil olan operator əmsalları vasitəsilə ifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, müsbət-müəyyən öz-özünə qoşma operator.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION WITH OPERATOR BOUNDARY CONDITIONS

S.F.BABAYEVA

SUMMARY

This paper studies a boundary value problem for a third order operator-differential equation with operator boundary conditions. Sufficient conditions are obtained for the solvability of the considered boundary value problem. These conditions are expressed with the operator coefficients included in the equation and the boundary conditions.

Key words: Hilbert space, operator-differential equation, boundary value problem, self-adjoint operator.

Поступило в редакцию: 11.03.2014 г.

Подписано к печати: 04.04.2014 г.